

Выводы. Предложен новый подход при моделировании нестационарного деформирования прямоугольной пластины, с установленным на ней амортизатором, в виде неизвестной силы, которая прикладывается к пластине. На основе предложенного в работе подхода, имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения прямой и обратной нестационарных задач механики твердого деформируемого тела. Показана возможность идентификации неизвестной возмущающей нагрузки по «зашумленным» исходным данным, что обуславливает применимость описанной методики при экспериментальных исследованиях для реальных результатов измерений.

Список литературы: 1. *Wu S. T., Chen J.Y., Yeh Y.C., Chiu Y.Y.* An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // *Journal of Sound & Vibration*. – 300 (1-2). – 2007. – P. 250-64. 2. *Ranjan V., Ghosh M. K.* Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures*, 2005. – Vol. 43. – P. 1513-1533. 3. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973 – 272 с. 4. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с. 5. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

Поступила в редколлегию 17.05.2011

УДК 539.3

Н.И.Воропай, аспирант, ХНАДУ, Харьков

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА

Збудовано розв'язок оберненої задачі на основі розв'язку прямої задачі про дослідження нестационарних коливань пружної ізотропної середі з циліндричною порожниною. Поширення осесиметричних деформаційних хвиль зумовлено завданням переміщень на поверхні порожнини у пружному тілі. Приведено числовий приклад розрахунку оберненої задачі.

The inverse problems solution based on the direct problem of non-stationary vibrations of an elastic isotropic medium with a cylindrical cavity is considered. Distribution of axisymmetric deformation waves which are caused by displacements on the surface of an elastic body. A numerical calculations' example for the inverse problem are presented.

Построено решение обратной задачи на основе прямой задачи об исследовании нестационарных колебаний упругой изотропной среды с цилиндрической полостью. Распространение осесимметричных деформационных волн обусловлено заданием перемещений на поверхности полости в упругом теле. Представлен численный пример расчета обратной задачи.

Введение. Зачастую, точность расчетов сооружений и машин на динамическую прочность, существенным образом зависит от полноты информации о воздействующих нагрузках (законов изменения их во времени и максимальных значений). Причем нагружения могут быть как кинематического, так и силового характеров.

Разработка методик решения обратных задач и соответствующих алгоритмов позволяет эффективно идентифицировать (восстановить) неизвестный закон изменения во времени нагрузок, воздействующих на элементы конструкций, а также находить их максимальных значений на основе известного в некоторых точках напряженно-деформируемого состояния (НДС) этих элементов [9, 10].

Анализ публикаций. Первые работы по обратным задачам в механике деформируемого твердого тела появились в начале XX века. Более интенсивно разработки в этой области математической физики начали проводиться в 70-80-е годы прошлого века и продолжаются до настоящего времени. По-видимому, их интенсивное развитие стало возможным в связи со значительными достижениями в области вычислительной техники и вычислительной математики [2, 7, 11].

В настоящей статье предложена методика решения обратной задачи, целью которой является определение перемещений на поверхности цилиндрической полости при условии, что известен закон изменений перемещений во времени в некоторой точке упругого пространства.

Решение обратной задачи базируется на решении соответствующей прямой задачи, которая заключается в отыскании изменений перемещений во времени в упругой среде при заданном изменении перемещений на поверхности цилиндрической полости. Различные подходы к решению указанной прямой задачи, а также достоверность полученных результатов, отражены в работах Барона и Парнеса [1], сотрудников Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины [4] и Е.Г. Янютина [8].

В настоящей работе решение обратной задачи будем строить на основе результатов, представленных в работе Е.Г. Янютина [8], в предположении постоянства радиуса цилиндрической полости.

Постановка задачи. Пусть в упругом пространстве, содержащем цилиндрическую полость радиуса R_0 , известен закон изменения перемещений во времени (рис. 1). Деформация среды и соответственно указанное перемещение вызывается некоторым кинематическим нагружением пространства на поверхности полости ($r = R_0$), находящейся в нем (рис. 1). Необходимо определить это кинематическое возмущение (радиальное перемещение), приложенное к поверхности полости. Для этого будем использовать известное перемещение в точке r^* .

Решение задачи. Укажем еще раз, что за основу, для построения реше-

ния обратной задачи, были использованы результаты из монографии [8], в которой можно найти подробное описание построения решения прямой задачи. Методика построения такого рода задач представлена также и в более поздней работе [9]. Опишем кратко соответствующее решение.

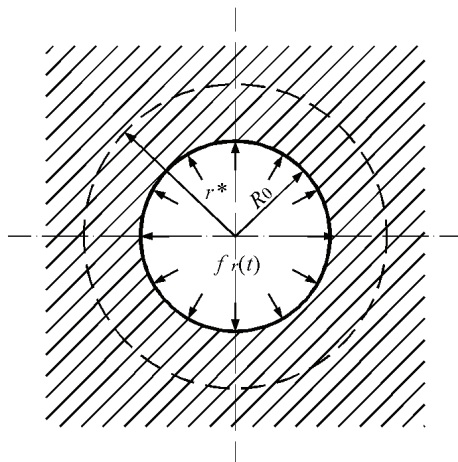


Рисунок 1 – Расчетная схема для решения обратной задачи

Уравнения, отражающие плоское нестационарное неосесимметричное деформирование упругого пространства в цилиндрических координатах (r, θ, z) [5] имеют следующий вид:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \omega_z}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе; Δ – объемное расширение; ω_z – проекция вектора вращения на ось z ; u_r и u_θ – радиальное и окружное перемещения точек среды соответственно. Причем,

$$\Delta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad (2)$$

Решение задачи строится с нулевыми начальными условиями

$$u_r|_{t=0} = u_\theta|_{t=0} = \frac{\partial u_r}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_\theta}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

и при следующих граничных условиях

$$u_r|_{r=R_0} = f_r(\theta, t); \quad u_\theta|_{r=R_0} = f_\theta(\theta, t); \quad u_r|_{r=\infty} = u_\theta|_{r=\infty} = 0, \quad (4)$$

где $f_r(\theta, t), f_\theta(\theta, t)$ – заданные функции, описывающие изменение радиальных и окружных перемещений, на поверхности бесконечного цилиндра, находящегося внутри упругого пространства.

При формулировке (4) указано, что при $r = +\infty$ возмущения в упругой среде отсутствуют.

В результате решения уравнений (1) и (2) [8, 9] с учетом условий (3) и (4) получим выражения, которые позволяют рассчитать перемещения u_r и u_θ в любой точке упругого пространства с цилиндрической полостью при кинематическом нагружении на его поверхности в условиях плоского неосесимметричного деформирования:

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 H(t-t_i) \int_0^{t-t_i} C_{i_n}(\tau) \cdot \sum_{j=1}^3 A_{ji} \frac{\partial}{\partial \tau} F_{ji_n}(r, t-t_i-\tau) d\tau \cdot \cos(n\theta); \\ u_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 H(t-t_i) \int_0^{t-t_i} C_{i_n}(\tau) \cdot \sum_{j=1}^3 B_{ji} \frac{\partial}{\partial \tau} G_{ji_n}(r, t-t_i-\tau) d\tau \cdot \sin(n\theta), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{r-R_0}{b}; t_2 = \frac{r-R_0}{a}; \\ A_{11} &= \frac{2b^2n}{r}; A_{12} = a; A_{22} = \frac{a^2n}{r}; A_{21} = A_{31} = A_{32} = 0; \\ F_{11_n}(r, t) &= f_n^*\left(\frac{r}{b}, t\right); F_{12_n}(r, t) = f_{n-1}^*\left(\frac{r}{a}, t\right); F_{22_n}(r, t) = f_n^*\left(\frac{r}{a}, t\right); \\ F_{21_n}(r, t) &= F_{31_n}(r, t) = F_{32_n}(r, t) = 0; \\ B_{11} &= 2b; B_{12} = \frac{a^2n}{r}; B_{21} = \frac{2b^2n}{r}; B_{22} = B_{31} = B_{32} = 0; \\ G_{11_n}(r, t) &= f_{n-1}^*\left(\frac{r}{b}, t\right); G_{12_n}(r, t) = f_n^*\left(\frac{r}{b}, t\right); G_{21_n}(r, t) = f_n^*\left(\frac{r}{a}, t\right); \\ G_{22_n}(r, t) &= G_{31_n}(r, t) = F_{32_n}(r, t) = 0; \\ f_n^*(r, t) &= \int_0^t f_n(r, \tau) d\tau; f_n(r, t) = \frac{\sqrt{\pi}(t^2 + 2rt)^{n-1/2}}{(2r)^n \Gamma(n+1/2)}, \end{aligned}$$

причем $H(t)$ – функция Хевисайда; $a^2 = (\lambda + \mu)/\rho$; $b^2 = \mu/\rho$ – скорости соответственно продольных и поперечных волн возмущений, возникающих в материале среды; $\Gamma(n)$ – гамма-функция.

Пример расчета обратной задачи проводится для случая, отвечающего осесимметричному плоскому деформированию упругого пространства с цилиндрической полостью, то есть $n = 0$ в разложениях (5). В этом случае, ре-

шение задачи строится на основе следующего выражения

$$u_r = \frac{a^2}{r} H(t - t_2) \int_0^{t-t_2} C(\tau) \sqrt{(t - t_2 - \tau)^2 + 2 \frac{r}{a} (t - t_2 - \tau)} d\tau, \quad (6)$$

которое решается относительно неизвестной функции $C(t)$. При этом предполагается, что функция $u_r(t)$ является известной функцией времени в точке $r = r^*$.

Таким образом, нестационарная обратная задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтера I рода, а радиальные перемещения, которые необходимо задать на поверхности цилиндрической поверхности упругого пространства, чтоб получить соответствующие перемещения в произвольной точке упругого пространства определяются как:

$$u_r^{R_0} = \frac{a^2}{R_0} \cdot \int_0^t C(\tau) \sqrt{(t - \tau)^2 + 2 \frac{R_0}{a} (t - \tau)} d\tau. \quad (7)$$

Поскольку задача является псевдокорректной, то есть некорректной по Адамару, но корректной по Тихонову [6], то не требуется применять специальных устойчивых методов.

Для решения уравнения (7) применялся численный подход, который состоит во введении аппроксимирующих выражений [3, 9] для искомых функций по формуле:

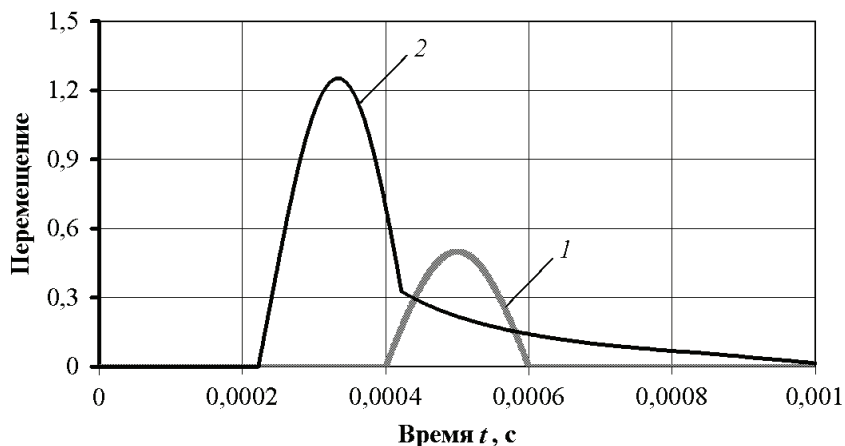
$$y(t) = \sum_{p=1}^m y_p (H(t - t_{p-1}) - H(t - t_p)), \quad (8)$$

где $y_p = \text{const}$; $t_p = p \cdot \Delta t$; $\Delta t = T/M$ – шаг во времени; M – целое положительное число; $m = 1 \dots M$ – число шагов во времени.

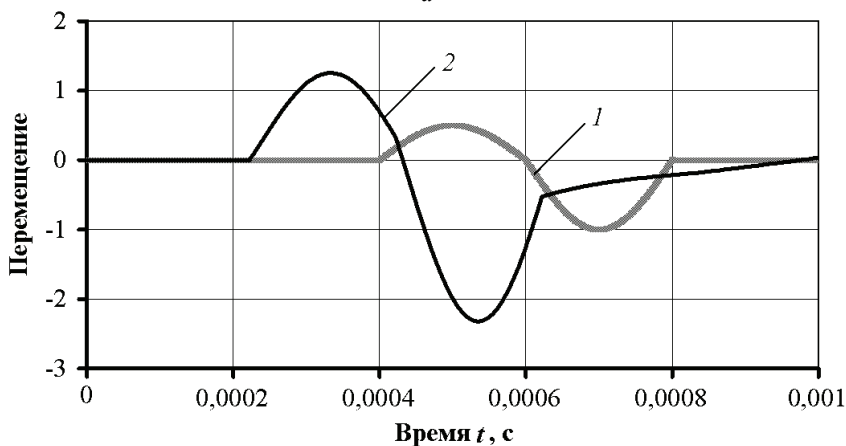
Подставляя аппроксимирующую формулу (8) в уравнения (6) получим выражения, из которых находятся неизвестная функция $C(t)$ в дискретной форме, после чего, подставляя их значения в (7), и найдем радиальные перемещения, вызывающие распространение осесимметричных упругих волн от круговой полости в однородной упругой среде.

Численные результаты. Численный расчет задачи проводился для следующих параметров: $R_0 = 0,3$ м, $E = 2,058 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,3$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Было рассмотрено два случая кинематического нагружения пространства. На рис. 2, а, б представлены кривые изменения перемещений во времени соответственно. Причем, кривая 1 соответствует известному закону изменению перемещений в точке $r^* = 1,2$ м, а кривая 2 – это восстановленные перемещения на цилиндрической поверхности, которые вызывают заданные перемещения.

Выводы. Указанная методика решения обратной задачи является достаточно эффективной, о чем свидетельствует приведенные результаты.



a



б

Рисунок 2 – Изменение во времени радиальных перемещений

Список литературы: 1. Барон, Парнес. Определение перемещений и скоростей точек среды при дифракции волн давления на цилиндрической полости в упругой среде // Прикладная механика. Сер. Е. – 1962. – Т. 29, № 2. – С. 183-193. 2. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: 2007. – 224 с. 3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: 1986. – 544 с. 4. Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н., Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. – Т. 5. Динамика упругих тел. – К.: 1986. – 288 с. 5. Ляв А. Математическая теория упругости. – Л.: 1935. – 674 с. 6. Петров Ю.П., Сизиков В.С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. – СПб.: 2003. – 261 с. 7. Самарский А.А., Вабичев П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: 2009. – 480 с. 8. Янютин Е.Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – К.: 1993. – 147 с. 9. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Вороний А.В., Шараната А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Х.: 2004. – 392 с. 10. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Вороний Н.И., Гнатенко Г.А., Гриша-

кин В.Т. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. В 2-х частях. – Часть I. – X.: 2010. – 180 с. 11. Ramm A.G. Inverse Problems: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. – Springer, 2005. – 462 p.

Поступила в редколлегию 15.07.2011

УДК 534

С.О. ГРИЦАН, студент, НТУ «ХПІ»;
О.О. ЛАРИН, канд. техн. наук, НТУ «ХПІ»

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ЛОПАТКАХ ТУРБОМАШИН МЕТОДОМ КОМБІНОВАНОГО РОЗКЛАДАННЯ ПО ВЛАСНИМ ФОРМАМ НАПРУЖЕНЬ ТА ПЕРЕМІЩЕНЬ

Розроблено метод для аналізу динамічного напруженого стану в турбінних лопатках, що виникає в процесі вимушених гармонічних коливань. Запропонований підхід базується на розкладанні в ряд по формам переміщень і формам напружень власних коливань, та передбачає суттєву конденсацію розмірності задачі при використанні докладних скінченно-елементних моделей.

A method has been developed for analysis of the dynamic stress state in turbine blades, which is occurring in forced harmonic vibrations. The proposed approach is based on a superposition of the displacement and stress normal modes, and provides a substantial reduction of the problem size for large finite element models.

Разработан метод анализа динамического напряженного состояния в турбинных лопатках, возникающий в процессе вынужденных гармонических колебаний. Предложенный подход базируется на разложении в ряд по формам перемещений и формам напряжений собственных колебаний и предусматривает существенную конденсацию размерности задачи при использовании подробных конечноэлементных моделей.

Вступ. Надійність деталей турбомашин залежить від рівня динамічних напружень, що виникають в процесі експлуатації. До найбільш вібраційно напружених елементів турбомашин відносять лопаткові апарати робочих коліс (в парових турбінах це – робочі апарати циліндру низького тиску).

Періодичні навантаження (викликані незбалансованістю ротора турбіни та нерівномірністю потоку пари), що діють на робочі колеса, призводять до вібрацій лопаток [1, 2]. В номінальному режимі роботи турбіни складні коливальні процеси в лопатковому апараті являють собою суперпозицію гармонічних коливань. Таким чином, визначення динамічних напружень, що виникають у процесі вимушених гармонічних коливань, є одним з важливих етапів у рішенні задачі визначення надійності і ресурсу турбінних лопаток.

В сучасній практиці проектування конструкцій у машинобудуванні най-